

Opción A

Ejercicio n° 1 de la opción A de septiembre de 1999

[2'5 puntos] Calcula el valor de la integral $\int_{-1}^2 \frac{2x^3-x^2-12x-3}{x^2-x-6} dx$

Solución

Como el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador tenemos que efectuar la división

$$\begin{array}{r} 2x^3-x^2-12x-3 \quad | \quad x^2-x-6 \\ -2x^3+2x^2+12x \\ \hline x^2-3 \\ -x^2+x+6 \\ \hline x+3 \end{array}$$

$$I = \int \frac{2x^3-x^2-12x-3}{x^2-x-6} dx = \int \left(2x+1 + \frac{x+3}{x^2-x-6} \right) dx = x^2+x + \int \frac{x+3}{x^2-x-6} dx = x^2+x + I_1.$$

$$I_1 = \int \frac{x+3}{x^2-x-6} dx = \int \frac{A}{x-3} dx + \int \frac{B}{x+2} dx = A \ln|x-3| + B \ln|x+2| = \frac{6}{5} \ln|x-3| - \frac{1}{5} \ln|x+2|$$

$x^2-x-6=0$. Se resuelve y sale $x=3$ y $x=-2$, por tanto $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$

$$\frac{x+3}{x^2-x-6} = \frac{x+3}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x-3)(x+2)}$$

$$\text{Para } x = -2 \rightarrow 1 = B(-5) \rightarrow B = -\frac{1}{5}$$

$$\text{Para } x = 3 \rightarrow 6 = A(5) \rightarrow A = \frac{6}{5}$$

$$\text{Luego } \int_{-1}^2 \frac{2x^3-x^2-12x-3}{x^2-x-6} dx = \left[x^2+x+I_1 \right]_{-1}^2 = \left[x^2+x+\frac{6}{5} \ln|x-3| - \frac{1}{5} \ln|x+2| \right]_{-1}^2 =$$

$$= (4+2+6/5 \ln(1) - 1/5 \ln(4)) - (-1-1+6/5 \ln(4) - 1/5 \ln(1)) = 6 - 7/5 \ln(4)$$

Ejercicio n° 2 de la opción A de septiembre de 1999

Considera la curva de ecuación $y = x^2 - 2x + 3$.

(a) [1'5 puntos] Halla una recta que sea tangente a dicha curva y que forme un ángulo de 45° con el eje de abscisas.

(b) [1 punto] ¿Hay algún punto de la curva en el que la recta tangente sea horizontal? En caso afirmativo, halla la ecuación de dicha tangente; en caso negativo, explica el porqué.

Solución

(a) $y = x^2 - 2x + 3$. Si es tangente su pendiente es $\text{tg}(45^\circ) = y' = 2x - 2$, es decir $1 = 2x - 2$, de donde $x = 3/2$. La recta tangente es $y - f(3/2) = f'(3/2)(x - 3/2)$. Pero $f(3/2) = 9/4 - 3 + 3 = 9/4$ y $f'(3/2) = 1$ luego la recta es $y - 9/4 = 1(x - 3/2)$.

(b) La tangente horizontal la suelen tener los extremos, es decir máximos o mínimos relativos. Como la gráfica es una parábola con las ramas hacia arriba es un mínimo. Vamos a calcularlo

$y' = 2x - 2$; $y' = 0$; $2x - 2 = 0$, de donde $x = 1$. Abcisa del mínimo

Como $y'' = 2 > 0$, efectivamente $x = 1$ es un mínimo.

La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$, es decir $y - 2 = 0(x - 1)$, operando $y = 2$.

Ejercicio n° 3 de la opción A de septiembre de 1999

[2'5 puntos] Prueba que todos los planos de la familia $(3+\lambda)x + (3-\lambda)y + (5-2\lambda)z = \lambda$, (con $\lambda \in \mathbb{R}$) contienen una misma recta y halla unas ecuaciones paramétricas de dicha recta.

Solución

$(3+\lambda)x + (3-\lambda)y + (5-2\lambda)z = \lambda$, es un haz de planos. Veamos los dos planos del haz

$$3x + \lambda x + 3y - \lambda y + 5z - 2\lambda z - \lambda = 0$$

$$(3x + 3y + 5z) + \lambda(x - y - 2z - 1) = 0$$

Los planos que forman el haz son $3x + 3y + 5z = 0$ y $x - y - 2z - 1 = 0$.

La recta generatriz del haz es $\begin{cases} 3x + 3y + 5z = 0 \\ x - y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$. En forma paramétrica sería, tomamos $z = \lambda$

De $\begin{cases} 3x+3y = -5\lambda \\ x-y = 1+2\lambda \end{cases}$, por Cramer tenemos $x = \frac{\begin{vmatrix} -5\lambda & 3 \\ 1+2\lambda & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-3-\lambda}{-6} = 1/2 + (1/6)\lambda$; $y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -5\lambda \\ 1 & 1+2\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{3+\lambda}{-6} = -1/2$

+ $(-1/6)\lambda$; luego la recta en paramétricas es $\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\lambda \\ y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

Ejercicio nº 4 de la opción A de septiembre de 1999

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(a) [1 punto] Calcula $A^t A$ y AA^t donde A^t denota la matriz traspuesta de A .

(b) [1'5 puntos] Siendo X una matriz columna, discute y, en su caso, resuelve la ecuación matricial $AA^t X = \lambda X$ según los valores del parámetro real λ .

Solución

(a) $A^t A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $AA^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $AA^t X = \lambda X$; $(AA^t - \lambda \cdot I)X = O_2$

$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \lambda \right] X = O$; $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Como el sistema es homogéneo tiene solución distinta de la trivial $(x,y) = (0,0)$ si y solo si $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) = 0$, de donde $\lambda = 1$ y $\lambda = 2$

Para $\lambda = 1$ tenemos $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, es decir la solución es $(x,y) = (x,0)$ es decir $y = 0$ y x cualquier valor.

Para $\lambda = 2$ tenemos $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \end{pmatrix}$, es decir la solución es $(x,y) = (0,y)$ es decir $x = 0$ e y cualquier valor.

Opción B

Ejercicio nº 1 de la opción B de septiembre de 1999

(a) [1 punto] Halla las asíntotas de la función definida para $x > 0$ por $f(x) = \frac{1+x^2}{x}$.

(b) [1 punto] Halla las regiones de crecimiento y de decrecimiento de f indicando sus máximos y mínimos locales y globales si los hay.

(c) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de f

Solución

(a) Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+x^2}{x} = +\infty$, $x = 0$ es una A.V. de f ; $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1+x^2}{x} = -\infty$

Tiene una A.O. $y = mx + n$ porque es una cociente con el numerador de grado una unidad más que el denominador, con

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^2}{x^2} = 1; \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x^2}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x^2 - x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

luego la A.O. es $y = mx + n = x$. Como es un cociente de polinomios es la misma en $+\infty$ como en $-\infty$.
Se puede hacer rápidamente dividiendo numerador entre denominador

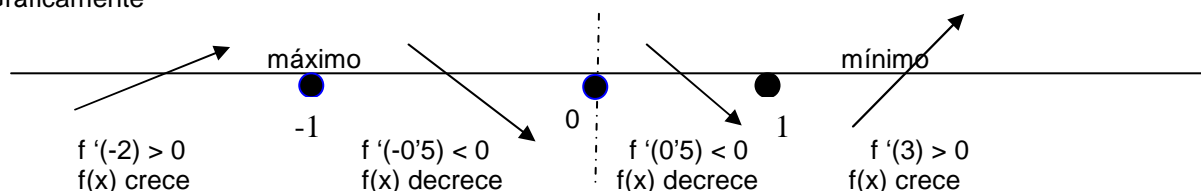
$$\begin{array}{r} 1+x^2 \\ -x^2 \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} x \\ x \\ \hline 1 \end{array}$$

b) Estudio de $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{2x(x) - (1+x^2)}{(x)^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$f'(x) = 0; x^2 - 1 = 0; x^2 = 1$, de donde $x = 1$ y $x = -1$ que serán los posibles máximos o mínimos
Hay que tener cuidado con $x = 1$, pues ahí no está definida la función

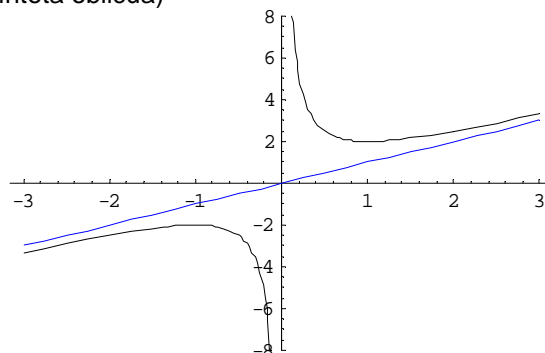
Gráficamente



$f(x)$ crece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, decrece en $(-1, 0) \cup (0, 1)$. Tendría un máximo relativo en $x = -1$ con valor $f(-1) = -2$, y un mínimo relativo en $x = 1$ con valor $f(1) = 2$.

En $x = 0$ no está definida y tiene una asíntota vertical

c) Su gráfica es (en azul la asíntota oblicua)



Ejercicio nº 2 de la opción B de septiembre de 1999

[2'5 puntos] Encuentra la función derivable $f: [-1, 1] \rightarrow \mathfrak{R}$ que cumple $f(1) = -1$ y

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ e^x - 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Solución

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ e^x - 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo integral tenemos

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (x^2 - 2x) dx = x^3/3 - x^2 + K \text{ en el intervalo } [-1, 0) \text{ y}$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (e^x - 1) dx = e^x - x + M \text{ en el intervalo } [0, 1].$$

Como es derivable continua, en particular en $x = 0$, luego $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - x + M) = e^0 - 0 + M = 1 + M$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^3/3 - x^2 + K) = 0 + 0 + K; \text{ por tanto } K = 1 + M$$

Por otro lado como $f(1) = -1$, $-1 = e^1 - 1 + M$, de donde $M = -e$ y $K = 1 + M = 1 - e$.

$$\text{La función pedida es } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - x^2 + (1 - e) & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ e^x - x - e & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Ejercicio nº 3 de la opción B de septiembre de 1999

[2'5 puntos] Clasifica el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro λ ,

$$\left. \begin{aligned} (1+\lambda)x + y + z &= 1 \\ x + (1+\lambda)y + z &= \lambda \\ x + y + (1+\lambda)z &= \lambda^2 \end{aligned} \right\}$$

Solución

$$\left. \begin{aligned} (1+\lambda)x + y + z &= 1 \\ x + (1+\lambda)y + z &= \lambda \\ x + y + (1+\lambda)z &= \lambda^2 \end{aligned} \right\};$$

La matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{pmatrix}$; matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ -\lambda & \lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 \cdot \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 \cdot \begin{vmatrix} 2+\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 \cdot 1(2 + \lambda + 1) = \lambda^2 \cdot (\lambda + 3)$$

Resolvemos $\lambda^2 \cdot (\lambda + 3) = 0$ y sus soluciones son $\lambda = 0$ (doble) y $\lambda = -3$.

Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq -3$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3$ y el sistema es compatible y determinado, es decir tiene solución única.

Si $\lambda = 0$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, tenemos que $\text{rango}(A) = 1$ pues las tres filas son iguales

En $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, tenemos que $\text{rango}(A^*) = 2$.

Como $\text{rango}(A) = 1 \neq \text{rango}(A^*) = 2$, el sistema es incompatible y no tiene solución.

Si $\lambda = -3$

$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y como $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, tenemos que $\text{rango}(A) = 2$

En $A^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 9 \end{pmatrix}$, como $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 21 \neq 0$, tenemos que $\text{rango}(A^*) = 3$.

Como $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A^*) = 3$, el sistema es incompatible y no tiene solución.

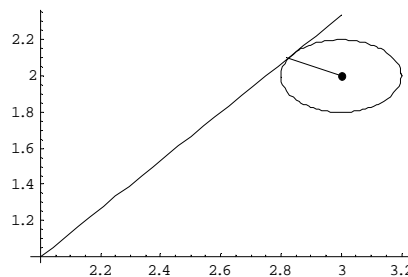
Ejercicio nº 4 de la opción B de septiembre de 1999

(a) [1'75 puntos] Halla la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $C = (3,2)$ y una de cuyas rectas tangentes tiene de ecuación $4x - 3y - 5 = 0$

(b) [0'75 puntos] Determina si el punto $X=(3,3)$ es interior, es exterior o está en la circunferencia.

Solución

(a)



radio = $r = d(C, \text{recta}) = \frac{|12-6-5|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 1/5$. La circunferencia es $(x-3)^2 + (y-2)^2 = (1/5)^2$

(b)

Para ver como es el punto calculamos la potencia del punto respecto a la circunferencia

$P_C(3,3) = (3-3)^2 + (3-2)^2 - (1/5)^2 = 24/25 > 0$, por tanto el punto es exterior a la circunferencia.